

جمهوری اسلامی ایران
اداره کل آموزش و پرورش شهر تهران
اداره آموزش و پرورش منطقه هفت تهران



ساعت امتحان:
وقت امتحان: ۱۳۰ دقیقه
تاریخ امتحان: ۱۳۹۲/۱۰/۱۷
تعداد برگ سوال: یک برگ

ش صندلی (ش داوطلب): نام واحد آموزشی: دبیرستان هاتف
نام و نام خانوادگی: نام پدر: پایه: سوم
رشته: ریاضی و فیزیک
سال تحصیلی: ۹۳ - ۹۲
نام دبیر: آقای یزدانمهر
سؤال امتحان درس: جبر و احتمال

۲-۱ با استفاده از استقرای ریاضی ثابت کنید $2^{n+1} + 1$ بر 3^{n+1} بخش پذیر است. ($n \in \mathbb{N}$)

۲-۲ با فرض گنگ بودن $\sqrt{3}$ و عدم اطلاع از گنگ بودن $\sqrt{5}$ ثابت کنید $3\sqrt{3} - 2\sqrt{5}$ عددی گنگ است.

۳- برای هر یک از احکام زیر در صورت نادرست بودن مثال نقض بیاورید. (نیازی به اثبات درستی احکام نیست)

الف) هر عدد گویای مثبت غیر یک به توان عدد گنگ، گنگ است.

$$P(A \cup B) = P(A) \cup P(B) \quad \text{ب)}$$

۴- به روش بازگشتی ثابت کنید:

$$|a \sin x + b \cos x| \leq \sqrt{a^2 + b^2}, (a, b, x \in \mathbb{R})$$

۵- به روش استنتاجی ثابت کنید اگر a و b اعداد صحیح و فرد باشند، $a^4 + b^4 - 2$ مضرب ۱۶ است.

۶- مجموعه $\{1, 2, 3, \dots, 53\}$ را در نظر بگیرید، حداکثر چند عدد می توان انتخاب کرد به طوری که تفاضل هیچ دوتایی از آنها برابر ۴ نباشد.

۷- حداقل چند نقطه با مختصات صحیح در فضا انتخاب کنیم (نقاطی که هر سه مولفه آنها صحیح می باشد) تا مطمئن شویم یک جفت نقطه وجود دارد به طوری که وسط پاره خط واصل بین آن دو نقطه نیز مختصات صحیح دارد؟

۸- به روش عضوگیری (اثبات محض) ثابت کنید:

$$P(A) \subseteq P(B) \Rightarrow A \subseteq B$$

پاسخ نامه سفید داده شود.

پاسخ سوالات در روی برگ سوال نوشته شود، نیاز به پاسخ نامه سفید ندارد.

۹- به کمک جبر مجموعه ها ثابت کنید:

$$\left. \begin{array}{l} A - B = A - C \\ B - A = C - A \end{array} \right\} \Rightarrow B = C \quad (\text{الف})$$

$$A \cup (A \cap B) = A \quad (\text{ب})$$

$$(A \Delta B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C) = (A \cup B) - [(A - C) \cap (B - C)] \quad (\text{ج})$$

$$10- \text{اگر } A_n = \left[\frac{1}{n}, \frac{n+2}{2n} \right] \text{ را بدست آورید. } \bigcup_{n=2}^{\infty} A_n - \bigcap_{n=2}^{\infty} A_n$$

۱۱- نمودار ون $(A \Delta B) \Delta C$ را رسم کنید.

موفق باشید

یزدان مهر



ساعت امتحان: ۱۲ صبح
تاریخ امتحان: ۱۳۹۲/۱۰/۱۷
تعداد برگ راهنمای تصحیح: دو برگ

نام واحد آموزشی: دبیرستان هاتف
نام دبیر: آقای یزدانمهر
پایه: سوم

راهنمای تصحیح درس: جبر و احتمال
نوبت امتحانی: نیمسال اول
رشته: رشته های: ریاضی و فیزیک
سال تحصیلی: ۱۳۹۲-۹۳

سوال ۱ - الف

$$n=1 \Rightarrow 2^r + 1 = 9 = 3^1 \times 3$$

$$p(k) \equiv T \Rightarrow 2^{r^k} + 1 = 3^k \times q$$

$$p(k+1) \equiv T \Rightarrow 2^{r^{k+1}} + 1 = 3^{k+1} \times q'$$

$$2^{r^k} + 1 = 3^k \times q \Rightarrow (2^{r^k} + 1)^r = (3^k \times q)^r \Rightarrow (2^{r^k})^r + 1^r + r \times 2^{r^k} \times (2^{r^k} + 1) = 3^{rk} \times q^r$$

$$2^{r^{k+1}} + 1 = 3^{rk} \times q^r - r \times 2^{r^k} \times (2^{r^k} + 1) = 3^{rk} \times q^r - r \times 2^{r^k} \times 3^k \times q$$

$$\Rightarrow 2^{r^{k+1}} + 1 = 3^{k+1} (3^{r^{k-1}} \times q^r - 2^{r^k} \times q) = 3^{k+1} (q') \Rightarrow p(k+1) \equiv T$$

سوال ۲

فرض خلف: حاصل عددی گویا مانند x است.

$$3\sqrt{2} - 2\sqrt{5} = x \Rightarrow 3\sqrt{2} - x = 2\sqrt{5} \Rightarrow 17 + x^2 - 6\sqrt{2}x = 20$$

$$\Rightarrow \sqrt{2} = \frac{7+x^2}{6x}$$

$$x \in \mathbb{Q} \Rightarrow 7+x^2 \in \mathbb{Q}, 6x \in \mathbb{Q} \Rightarrow \frac{7+x^2}{6x} \in \mathbb{Q}$$

پس فرض خلف باطل و حکم درست است

سوال ۳

الف $10^{\log 2} = 2$

ب $A = \{1\}, B = \{2\}$

$$P(A) = \{\{1\}, \phi\}, P(B) = \{\{2\}, \phi\} \Rightarrow P(A) \cup P(B) = \{\{1\}, \{2\}, \phi\}$$

$$P(A \cup B) = \{\{1\}, \{2\}, \{1, 2\}, \phi\}$$

سوال ۸ - الف

$$A \subseteq A \Rightarrow A \in P(A) \xrightarrow{P(A) \subseteq P(B)} A \in P(B) \Rightarrow A \subseteq B$$

سوال ۹ - الف

$$\left. \begin{array}{l} A - B = A - C \\ B - A = C - A \end{array} \right\} \Rightarrow (A - B) \cup (B - A) = (A - C) \cup (C - A)$$

$$\Rightarrow A \Delta B = A \Delta C \Rightarrow A \Delta (A \Delta B) = A \Delta (A \Delta C)$$

$$\Rightarrow (A \Delta A) \Delta B = (A \Delta A) \Delta C \Rightarrow \emptyset \Delta B = \emptyset \Delta C \Rightarrow B = C$$

سوال ۹ - ب

$$A \cup (A \cap B) = (A \cap U) \cup (A \cap B) = A \cap (U \cup B) = A \cap U = A$$

سوال ۹ - ج

$$\begin{aligned} (A \cup B) - [(A - C) \cap (B - C)] &= (A \cup B) - [(A \cap B) - C] \\ &= (A \cup B) \cap [(A \cap B) \cap C']' \\ &= (A \cup B) \cap [(A \cap B)' \cup C] \\ &= [(A \cup B) \cap (A \cap B)'] \cup [(A \cup B) \cap C] \\ &= [(A \cup B) - (A \cap B)] \cup [(A \cap C) \cup (B \cap C)] \\ &= (A \Delta B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C) \end{aligned}$$

سوال ۱۰

دقت کنیم چون از سمت راست محور داریم در سمت راست بازه به $\frac{1}{2}$ نزدیک می شویم پس $\frac{1}{2}$ در A_∞ نیز موجود می باشد و بازه از راست بسته است ولی هیچ وقت در سمت چپ بازه به صفر نمی رسیم و بازه از چپ در A_∞ باز است.

$$A_n = \left[\frac{1}{n}, \frac{n+2}{2n} \right] \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \left[\frac{1}{2}, 1 \right] \cup \left[\frac{1}{3}, \frac{5}{6} \right] \cup \left[\frac{1}{4}, \frac{6}{8} \right] \dots \cup \left(\frac{1}{2}, 1 \right] = \left(\frac{1}{2}, 1 \right]$$

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \left[\frac{1}{2}, 1 \right] \cap \left[\frac{1}{3}, \frac{5}{6} \right] \cap \left[\frac{1}{4}, \frac{6}{8} \right] \dots \cap \left(\frac{1}{2}, 1 \right] = \left[\frac{1}{2}, 1 \right] \cap \left(\frac{1}{2}, 1 \right] = \left\{ \frac{1}{2} \right\}$$

$$\Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n - \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \left(\frac{1}{2}, 1 \right] - \left\{ \frac{1}{2} \right\}$$

سوال ۱۱

$$(A \Delta B) \Delta C$$

